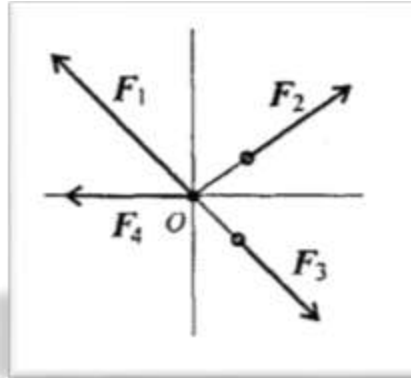


Тема.1.2. Плоская система сходящихся сил

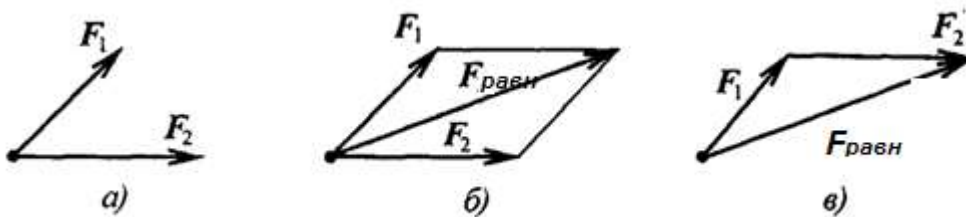
Система трех и более сходящихся сил. Сложение сил графическим способом.

Сходящейся называется система сил, линия действия которых пересекаются в одной плоскости.



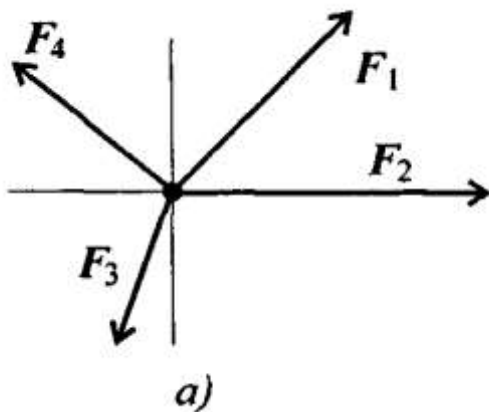
Графический способ определения равнодействующей

Равнодействующая сходящихся сил



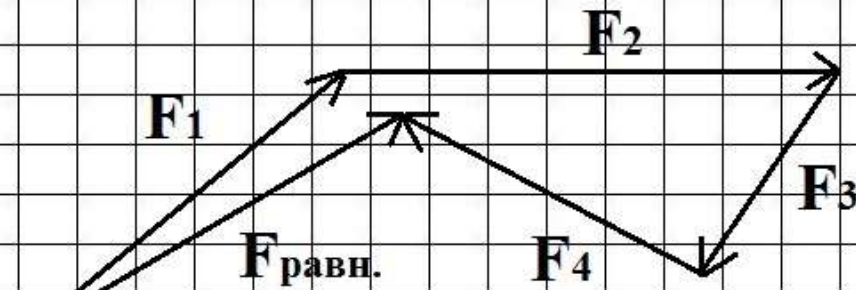
Дано: $F_1=35$ кН; $F_2=40$ кН; $F_3=20$ кН; $F_4=28$ кН

Определить: равнодействующую $F_{\text{равн}}$.



1. Масштаб 10 кН на 1 см

2.



$$F_{\text{равн.}} = 4,0 \text{ см} \cdot 10 \text{ кН} / 1 \text{ см} = 40 \text{ кН}$$

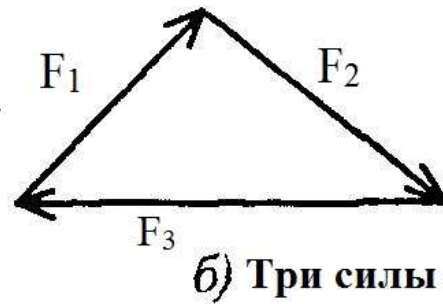
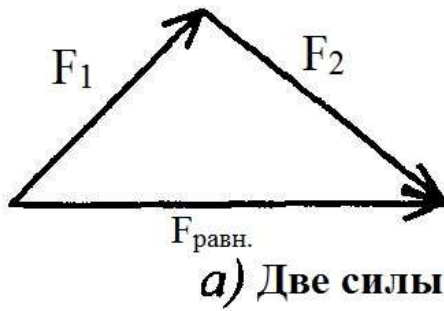
Порядок построения многоугольника сил

1. Выбираем масштаб;
2. К концу 1-го вектора прикладываем начало 2-го и т.д.
3. $F_{\text{равн.}}$ – соединяет начало 1-го вектора с последним. Стрелка направлена к последнему вектору.
4. Измерим $F_{\text{равн.}}$ и умножив на масштаб, получим значение.

Условие равновесия плоской системы сходящихся сил

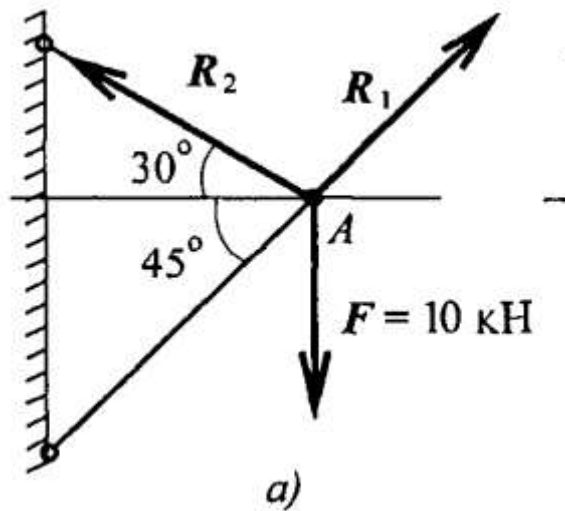
Условие равновесия сходящихся сил находится в равновесии, если многоугольник замкнут.

По рисунку определите, сколько сил в системе?



Задача.

Пример 1. Груз подвешен на стержнях и находится в равновесии. Определить усилия в стержнях



Задания на закрепление урока

1. По изображенным многоугольникам сил (рис. 2.7) решите, сколько сил входит в каждую систему и какая из них уравновешена. (Обратить внимание на направление векторов.)

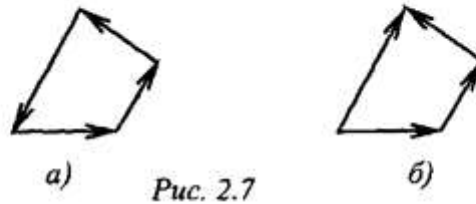


Рис. 2.7

2. Из представленных силовых треугольников выберите треугольник, построенный для точки A (рис. 2.8, 2.9).

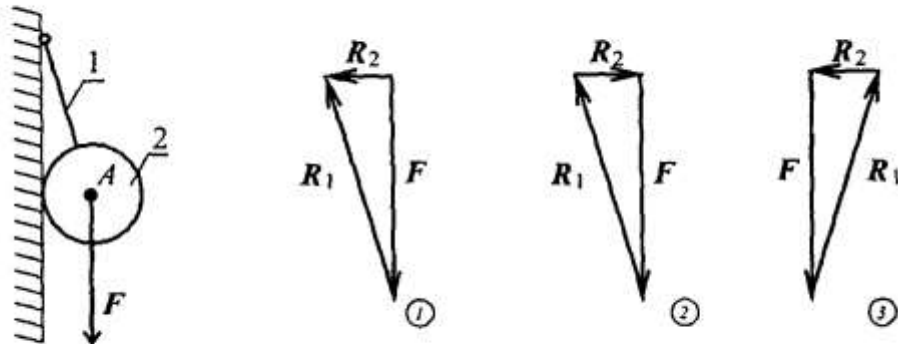


Рис. 2.8

Шар подвешен на нити и находится в равновесии. ~~Обратить~~ ~~внимание~~ на направление реакции от гладкой опоры и условие равновесия шара (рис. 2.8).

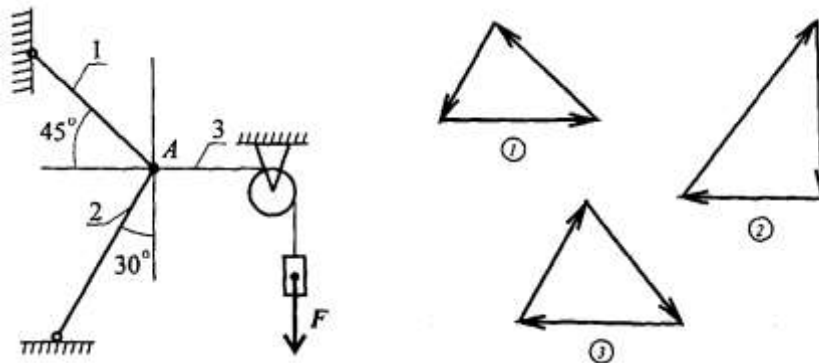


Рис. 2.9

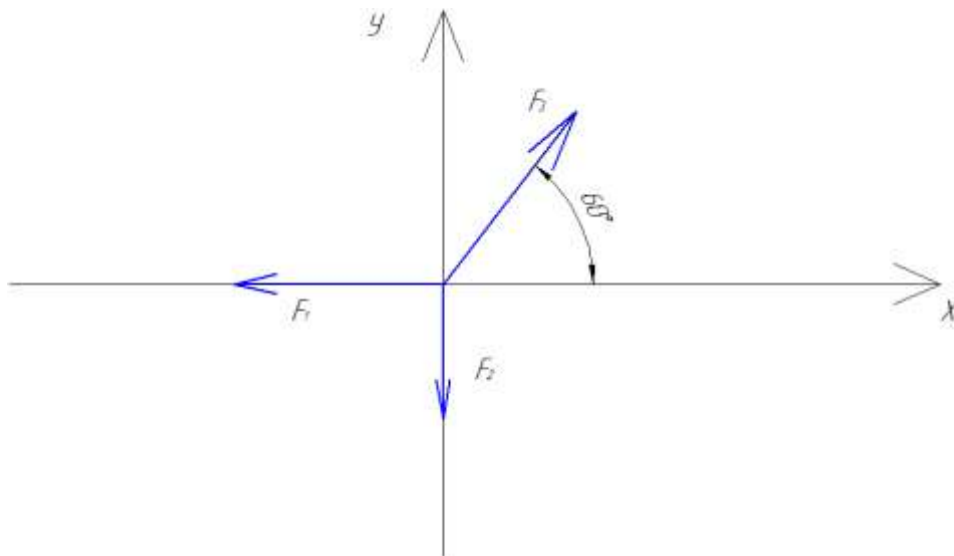
Груз F подвешен на канате и находится в равновесии. Обратить внимание на реакции, приложенные к точке A . Силы, не приложенные к точке A , не рассматриваются. Не забывать об условии равновесия системы сил (рис. 2.9).

Сложение сил аналитическим способом. Условие равновесия системы сходящихся сил.

1) Сложение сил аналитическим способом.

Сложение сил аналитическим способом заключается в определении проекций сил на ось X и на ось Y.

Определите проекцию сил на ось X, Y



Сила	F_1	F_2	F_3
Ось X:	$-F_1$	0	$F_3 \cdot \cos 60$
Ось Y:	0	$-F_2$	$F_3 \cdot \cos 30$

2) Аналитическое условие равновесия

$$- \left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{array} \right. \quad \text{Услови еравновесия}$$

Последовательность решения задач

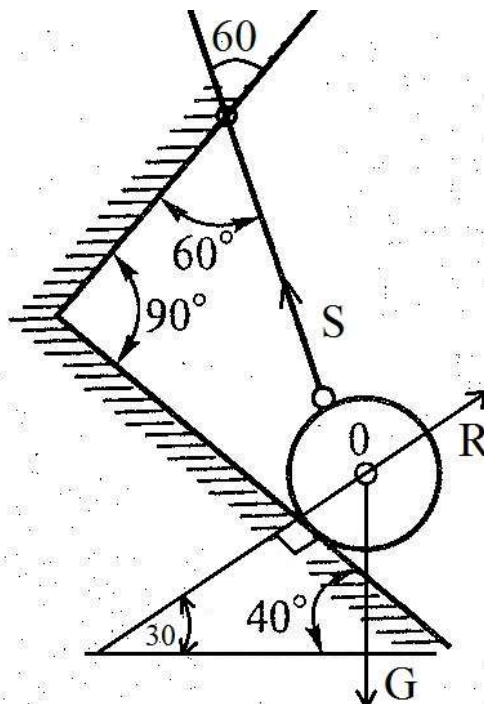
1. Указать направление реакций связи;
2. Определить проекции сил на ось X и на ось Y;
3. Записать условия равновесия ;

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{array} \right.$$

4. Решить систему уравнения;
5. Определить значение и выполнить проверку графическим способом.

Задача 1

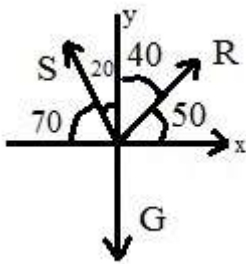
Определить величину и направление реакций связей аналитическим и графическим способом, если $G=30 \text{ кН}$



Дано: $G=30 \text{ кН}$

Найти: S, R

Решение:



$$x: S_x = -S \cdot \cos 70; R_x = R \cdot \cos 50; G_x = 0$$

$$y: S_y = S \cdot \cos 20; R_y = R \cdot \cos 40; G_y = -G$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \begin{cases} -S \cdot \cos 70 + R \cdot \cos 50 = 0 \\ S \cdot \cos 20 + R \cdot \cos 40 - G = 0 \end{cases} \begin{cases} -S \cdot 0,34 + R \cdot 0,64 = 0 \\ S \cdot 0,93 + R \cdot 0,76 - 30 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R = S \cdot 0,34 / 0,64 \\ S \cdot 0,93 + S \cdot 0,34 / 0,04 \cdot 0,76 - 30 = 0 \end{cases} \begin{cases} R = S \cdot 0,34 / 0,64 \\ S \cdot (0,93 + S \cdot 0,34 / 0,04 \cdot 0,76) = 30 \end{cases}$$

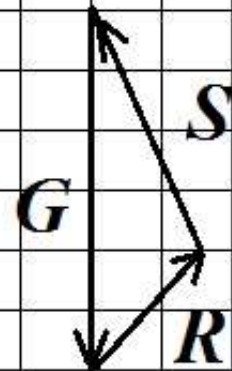
$$\begin{cases} R = S \cdot 0,34 / 0,64 \\ S \cdot 1,33 = 30 \end{cases} \begin{cases} S = 30 / 1,33 = 22,55 \text{ кН} \\ R = 22,55 \cdot 0,34 / 0,64 \end{cases} \begin{cases} R = 11,97 \text{ кН} \\ S = 22,55 \text{ кН} \end{cases}$$

Графический способ

Масштаб 10 кН на 1 см

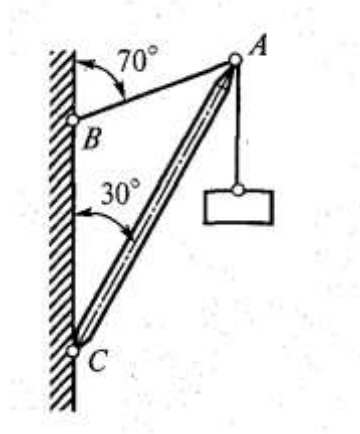
$$R = 1,2 \text{ см} \cdot 10 \text{ кН} / 1 \text{ см} = 12 \text{ кН}$$

$$S = 2,4 \text{ см} \cdot 10 \text{ кН} / 1 \text{ см} = 24 \text{ кН}$$



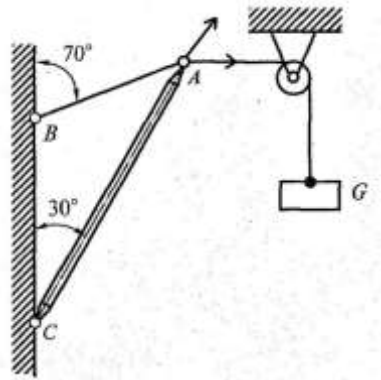
Задача 2

Определить величину и направление реакций связей аналитическим и графическим способом, если $G=20$ кН



Задача 3

Определить величину и направление реакций связей аналитическим и графическим способом, если $G=20$ кН

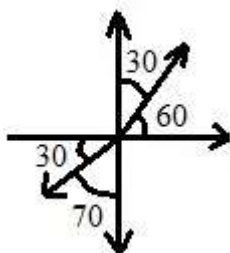


Дано: $G=20$

Найти: S_1, S_2

Решение:

x:



$$S_{1x} = -S_1 \cdot \cos 20;$$

$$S_{2x} = S_2 \cdot \cos 60; G_x = G$$

y:

$$S_{1y} = -S_1 \cdot \cos 70;$$

$$S_{2y} = S_2 \cdot \cos 30; G_y = 0$$

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \begin{cases} -S_1 \cdot \cos 20 + S_2 \cdot \cos 60 + G = 0 \\ S_1 \cdot \cos 70 + S_2 \cdot \cos 30 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -S_1 \cdot \cos 20 + (S_1 \cdot \cos 70 / \cos 30) \cdot \cos 60 + G = 0 \\ S_2 = S_1 \cdot \cos 70 / \cos 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_1(-\cos 20 + (\cos 70 / \cos 30) \cdot \cos 60) - G \\ S_2 = S_1 \cdot \cos 70 / \cos 30 \end{cases}$$

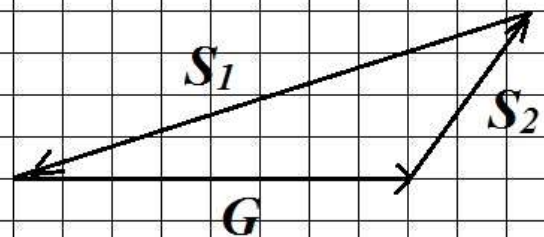
$$\begin{cases} S_1(-0,94 + (0,34/0,86) \cdot 0,5) = -20 \\ S_2 = S_1 \cdot 0,34/0,86 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_1(-0,74) = -20 \\ S_2 = S_1 \cdot 0,34/0,86 \end{cases} \begin{cases} S_1 = 27,02 \text{ кН} \\ S_2 = 10,68 \text{ кН} \end{cases}$$

Графический способ
Масштаб 5 кН на 1 см

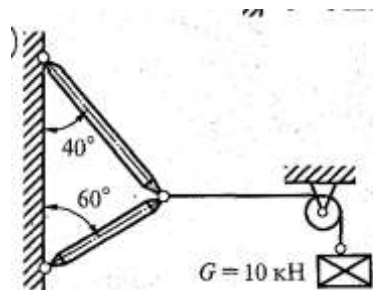
$$S_1 = 5,5 \text{ см} \cdot (5 \text{ кН} / 1 \text{ см}) = 27,5 \text{ кН}$$

$$S_2 = 2,5 \text{ см} \cdot (5 \text{ кН} / 1 \text{ см}) = 12,5 \text{ кН}$$



Задача 4

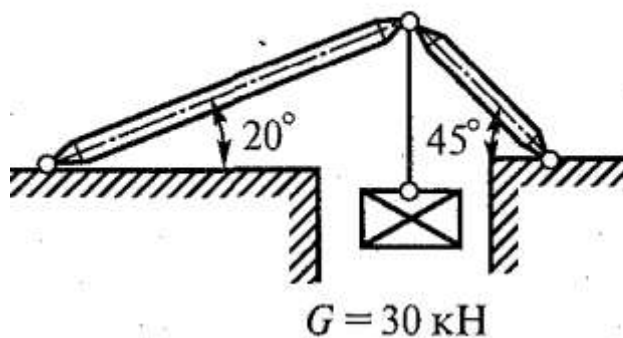
Определить величину и направление реакций связей аналитическим и графическим способом, если $G=20$ кН



Задание на закрепление урока

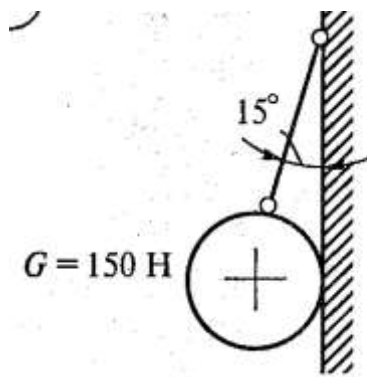
Задача 1

Определить величину и направление реакций связей аналитическим и графическим способом, если $G=30$ кН



Задача 2

Определить величину и направление реакций связей аналитическим и графическим способом, если $G=150$ кН



Общие сведения о стержневых системах: кронштейны, консольные фермы, строительные стропильные фермы.

Кронштейны – конструкции, состоящие из гибкой связи и жёсткого стержня.

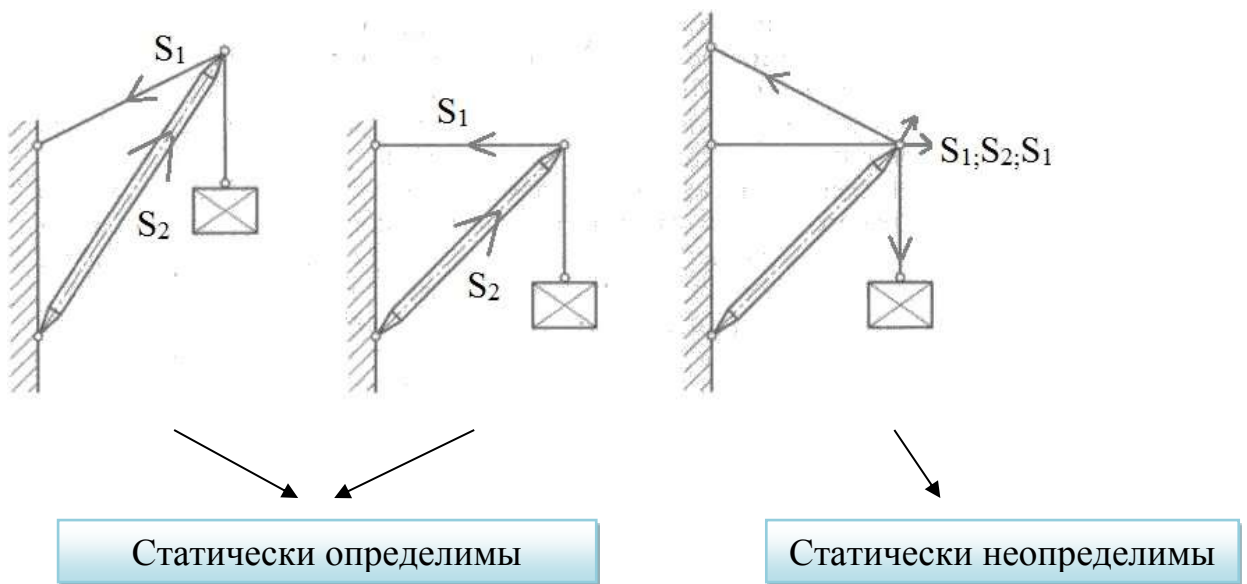
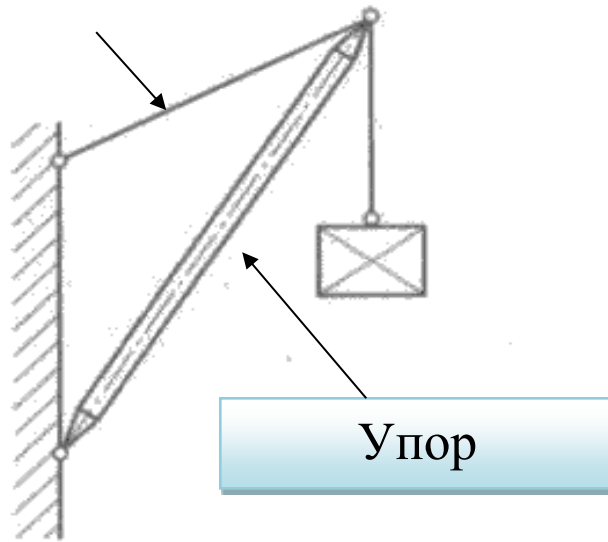


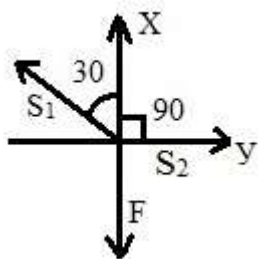
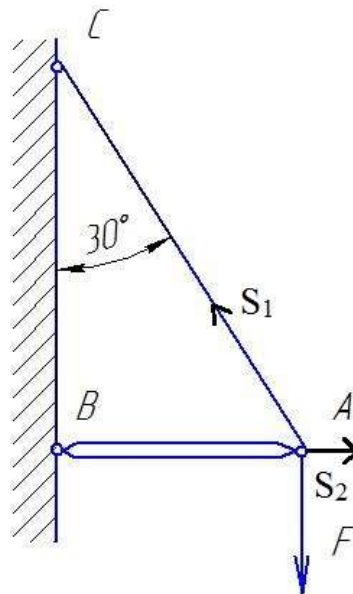
Рисунок 1 – Кронштейны

Тяга



Задача 1

Определить усилия в стержнях AB и AC кронштейна, если $F = 20$ кН.



Дано:

$F = 20$ кН

Найти: $S_1; S_2$

Решение:

X: $S_{1x} = -S_1 \cdot \cos 60^\circ$; $S_{2x} = S_2$; $F = 0$

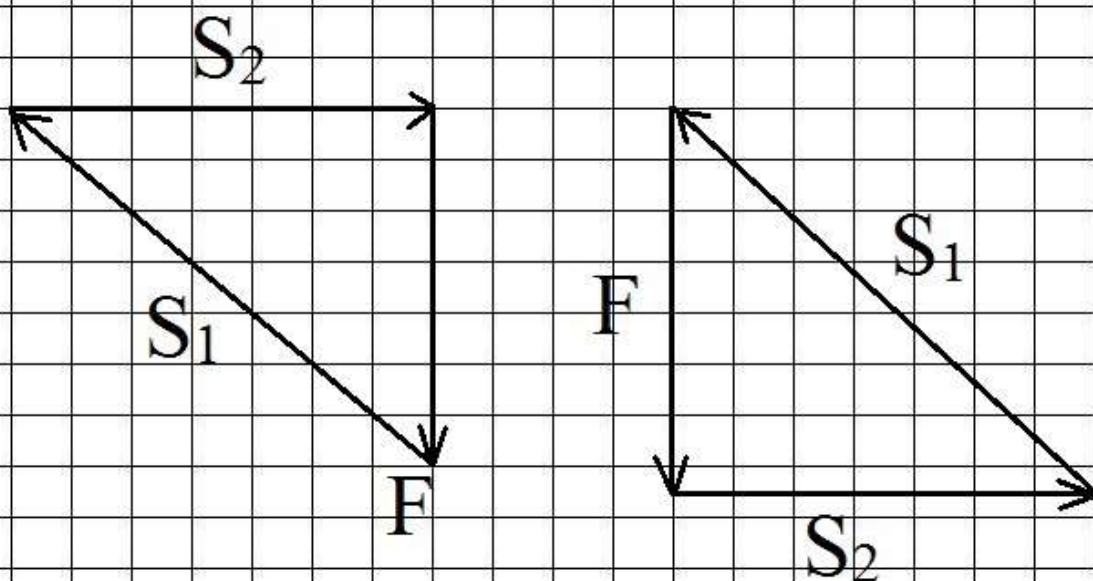
Y: $S_{1y} = S_1 \cdot \cos 30^\circ$; $S_{2y} = 0$; $F = -F$

Аналитический способ

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} -S_1 \cdot \cos 60 + S_2 = 0 \\ S_1 \cdot \cos 30 - F = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} S_2 = S_1 \cdot \cos 60 \\ S_1 = F / \cos 30 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_2 = S_1 \cdot 0,5 \\ S_1 = 20 / 0,86 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} S_2 = 11,63 \text{ кН} \\ S_1 = 23,25 \text{ кН} \end{array} \right.$$

Графический способ
Масштаб 5 кН на 1 см



$$S_1 = 4,6 \text{ см} \cdot 5 \text{ кН/1 см} = 23 \text{ кН}$$

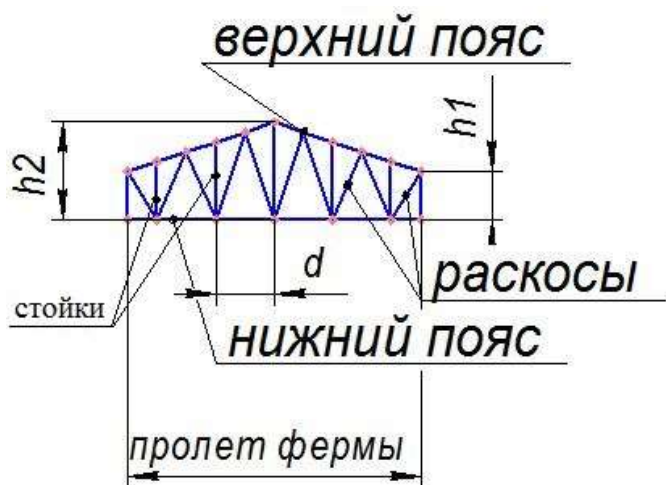
$$S_2 = 2,3 \text{ см} \cdot 5 \text{ кН/1 см} = 11,5 \text{ кН}$$

Фермой называется система стержней соединенных между собой в узлах и образующих геометрически неизменяемую конструкцию.

В зависимости от назначения различают фермы стропильные, крановые, башенные, мостовые.

Консольные фермы -

Балочные фермы



d - панель фермы (1,5 м или 3 м)
 h - высота
 l - пролёт фермы (12;12;24;30;36м)

Общий порядок определения усилий в стержнях фермы построением диаграммы Максвелла —Кремоны.

1 Вычерчивают геометрическую схему фермы строго в масштабе длин, который определяется размерами чертежа. Рекомендуется начинать с масштаба 1:200 или 1: 100. Его можно уменьшать или увеличивать, если чертеж получается слишком мелким или выходит за рамки листа. После вычерчивания фермы к узлам прикладывают внешние силы.

2 Обозначают внешние и внутренние поля. Внешние поля ограничены внешними силами и поясами фермы. Эти поля разомкнуты, их принято обозначать буквами $a, B, c, d \dots$, обходя ферму по часовой стрелке. Первое поле, как правило,

ограничено линией действия опорной реакции и первой (крайней) силы. Оно представляет собой полуплоскость, расположенную слева от линии действия указанных сил. Если ферма и нагрузки имеют ось симметрии, то симметричные поля правой части фермы обозначают теми же буквами, что и в левой части, но со штрихами, например a' , B' , c' , d' и т.д. Поле, расположенное между опорными реакциями, не имеет себе симметричного (при отсутствии нагрузки по нижнему поясу фермы).

Внутренние поля ограничены только стержнями фермы. Они замкнуты, их обозначают цифрами 1, 2, 3, ..., обходя ферму слева направо. При симметричной схеме фермы поля правой половины можно обозначать теми же цифрами, что и левой, но со штрихами, например 1, 2', 3' и т.д.

3. Определяют опорные реакции фермы графическим способом в следующем порядке:

а) выбирают масштаб сил, который зависит от размеров чертежа;

б) откладывают в принятом масштабе все внешние силы поочередно в том порядке, в каком они встречаются при обходе фермы по часовой стрелке. Каждая сила обозначается двумя полями (буквами), между которыми она расположена. Отложенные последовательно сверху вниз внешние силы образуют силовую линию, длина которой в масштабе сил равна сумме всех внешних сил, действующих на ферму;

в) определяют опорные реакции фермы. Вследствие симметрии схемы фермы и нагрузки (а также при отсутствии нагрузок по нижнему поясу) опорные реакции равны между собой, причем каждая из них составляет половину длины силовой линии и направлена вверх (в сторону, противоположную действию нагрузки). Опорные реакции, как и внешние силы, обозначаются полями, между которыми они лежат. На силовую линию наносят точку, которая обозначает поле, расположенное между опорными реакциями. Она находится в середине силовой линии. Нижняя половина силовой линии является правой опорной реакцией, а верхняя — левой.

4. Строят собственно диаграмму усилий в следующем порядке:

а) обозначают стержни. При графическом способе расчета каждый стержень обозначается двумя полями, между которыми он лежит. Наименование стержня зависит также от рассматриваемого узла; стержень обозначается двумя полями, которые указываются в том порядке, в каком встречаются при обходе рассматриваемого узла по часовой стрелке. Обозначение стержней может быть цифровым ($1-2$, $2-3$ и т.д.) для элементов решетки и буквенно-цифровым ($1-a$, $2-B$ и т.д.) для поясов и опорных стоек;

б) мысленно вырезают узлы. Первым вырезают узел, в котором сходятся два стержня. С него начинают расчет. Стержни этого узла расположены между тремя полями: двумя буквенными и одним цифровым. На силовой линии уже есть точки, соответствующие буквенным полям. Через эти точки проводят линии, параллельные стержням рассматриваемого узла. Пересечение этих линий обозначают цифрой, соответствующей цифре поля, примыкающего к рассматриваемому узлу. Стержень и параллельное ему усилие имеют одинаковое обозначение. По длине линии на диаграмме, измеренной в масштабе сил, находят

величину усилия в соответствующем стержне. Знак усилия определяют следующим образом. Сначала по схеме фермы устанавливают обозначение стержня, обходя узел по часовой стрелке, затем на диаграмме перемещаются по направлению усилия от одной точки к другой в том порядке, в каком обозначается стержень; затем это движение переносят на стержень фермы. Если движение направлено по стержню от узла, то стержень считается растянутым, а если к узлу — сжатым. На диаграмме сжатый стержень показывают жирной (или красной) линией, а растянутый — тонкой (или синей);

в) вырезают узел, в котором сходятся три стержня. Усилия в двух из них неизвестны, а в третьем оно определено при рассмотрении первого узла. На диаграмме усилий находят две точки, соответствующие двум полям, прилегающим к рассматриваемому узлу. Через эти точки проводят линии, параллельные стержням, усилия в которых неизвестны. Точку пересечения обозначают номером поля, лежащего между двумя стержнями, усилия в которых отыскиваются. Длины линий на диаграмме, измеренные в масштабе сил, равны величине усилий в этих стержнях. Знак определяют по правилам, описанным для первого узла;

г) для каждого следующего рассмотрения выбирают тот узел, в котором сходятся два стержня с неизвестными усилиями, а усилия в остальных стержнях уже определены. Порядок определения величины и знака усилия остается тем же, что для первого и второго узлов. При симметричной ферме диаграмму усилий можно строить только для одной (левой) половины, так как усилия в стержнях правой половины равны усилиям в симметричных стержнях левой половины;

д) определение усилий заканчивают составлением таблицы с обозначением стержней и указанием величины и знака усилий.

Пример.

Определить усилия в стержнях балочной фермы, приведенной на рис. 3, путем построения диаграммы Максвелла—Кремоны по следующим данным: $a = 3$ м, $h = 3,5$ м, $F_1 = 10$ кН, $F_2 = 20$ кН.

Решение. 1. Вычерчиваем геометрическую схему фермы. Принимаем масштаб: 1 см — 3 м, т.е. 1:300.

Обозначаем внешние поля буквами a, b, c, c', b', a', d , внутренние — цифрами $1, 2, 3, 3', 2', 1'$.

Определяем опорные реакции фермы:

а) выбираем масштаб сил: в 1 см — 10 кН;

б) строим силовую линию $a-b-c-c'-b'-a'$ из внешних сил

в) определяем опорные реакции, для чего делим силовую линию пополам точкой d . Отрезок $a'-d$, измеренный в масштабе сил, представляет собой правую опорную реакцию, отрезок $d-a$ — левую. Каждая из них равна 4 см, т.е. 40 кН.

Строим диаграмму усилий:

а) мысленно вырезаем узел A фермы, в котором сходятся два стержня, которые теперь будут обозначаться $b-1$ и $1-d$, поскольку в таком порядке следуют буквы и цифры при обходе узла по часовой стрелке ($b, 1, d$). На силовой линии уже есть точки b и d .

Проводим через низ линии, параллельные стержням, примыкающим к узлу A . Они пересекаются в точке 1.

Определяем величины усилий в стержнях $b-1$ и $1-d$: длина отрезка $b-1$ равна 5,9 см, значит, усилие в стержне $b-1$ составляет 59 кН; длина отрезка $1-d$ равна 5,0 см, следовательно, усилие будет 50 кН.

Определяем знаки усилий. На диаграмме усилий движение от точки b к точке 1 направлено справа налево. Это направление для стержня $b-1$ фермы является направлением к узлу, т.е. стержень сжат. Перед числовым значением усилия должен быть знак «минус». Движение от точки 1 к точке d на диаграмме направлено слева направо. Для стержня $1-d$ это направление от узла A , т.е. стержень $1-d$ растянут. Перед числовым значением усилия должен быть знак «плюс», который опускаем;

б) вырезаем узел E , в котором сходятся два стержня, усилия в которых неизвестны. Эти стержни будут обозначаться $1-2$ и $2-d$. На диаграмме усилий уже есть точки 1 и d . Проводим линии, параллельные стержню фермы $1-2$ (вертикально через точку 1) и стержню $2-d$ (горизонтально через точку 2). Эти линии на диаграмме пересекаются в точке 1 , т.е. точка их пересечения 2 совпадает с точкой 1 . Таким образом, линия $1-2$ на диаграмме превращается в точку, а это значит, что усилие в стержне $1-2$ равно нулю. Усилие в стержне $2-d$ по величине и знаку равно усилию в стержне $1-d'$,

в) вырезаем узел C . В нем сходятся стержни $1-b$, $c-3$, $3-2$ и $2-1$ (так они обозначаются при обходе узла по часовой стрелке), из которых неизвестны усилия в двух: $c-3$ и $3-2$. На диаграмме усилий уже есть точки b , c , 1 и 2 . Чтобы получить точку 3 , проводим через точку c линию, параллельную стержню $c-3$ фермы, а через точку 2 — линию, параллельную стержню $3-2$. Точка пересечения этих линий и является искомой точкой 3 на диаграмме.

Длина отрезка $c-3$ равна 3,8 см, т.е. усилие в стержне $c-3$ составляет 38 кН. Длина отрезка $3-2$ равна 1,9 см, т.е. усилие в стержне $3-2$ составляет 19 кН.

Определяем знаки усилий в стержнях $c-3$ и $3-2$. На диаграмме движение от точки c к точке 3 направлено справа налево. Для стержня $c-3$ фермы это направление к узлу C , значит, стержень сжат (знак «минус»). Движение от точки 3 к точке 2 на диаграмме направлено влево вверх. Для стержня $3-2$ это направление к узлу, т.е. стержень сжат (знак «минус»);

г) вырезаем узел D . В нем сходятся стержни $c'-3'$ и $3'-3$, в которых усилия неизвестны. На диаграмме через точку c проводим линию, параллельную стержню $c'-3'$, а через точку 3 — линию, параллельную стержню $3'-3$. Точка пересечения этих линий является искомой точкой $3'$, которая симметрична точке 3 . Длина отрезка $3'-3$ равна 2 см, т.е. усилие в стержне $3'-3$ составляет 20 кН. Движение от точки $3'$ к точке 3 направлено вниз. Для стержня $3'-3$ это движение от узла D , т.е. стержень растянут. Отрезок $c'-3'$ на диаграмме усилий симметричен отрезку $c-3$, а это значит, что усилие в стержне $c'-3'$ равно по величине усилию в стержне $c-3$ и имеет тот же знак, т.е. оно составляет -38 кН.

На этом решение заканчивают, так как усилия в стержнях правой части фермы равны усилиям в симметричных стержнях левой части. По данным расчета составляют таблицу усилий:

$b-1$	$1-d$	$1-2$	$c-3$	$3-2$	$2-d$	$3-3$
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

-59 кН	50 кН	0	-38 кН	-19 кН	50 кН	20 кН
--------	-------	---	--------	--------	-------	-------

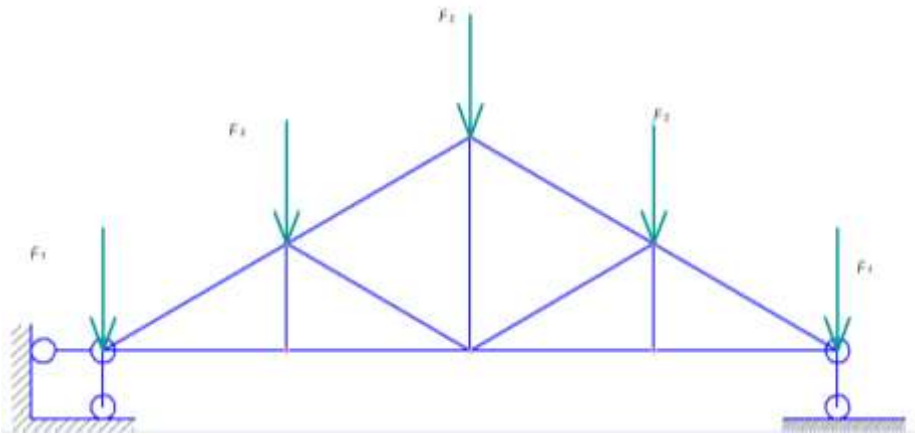
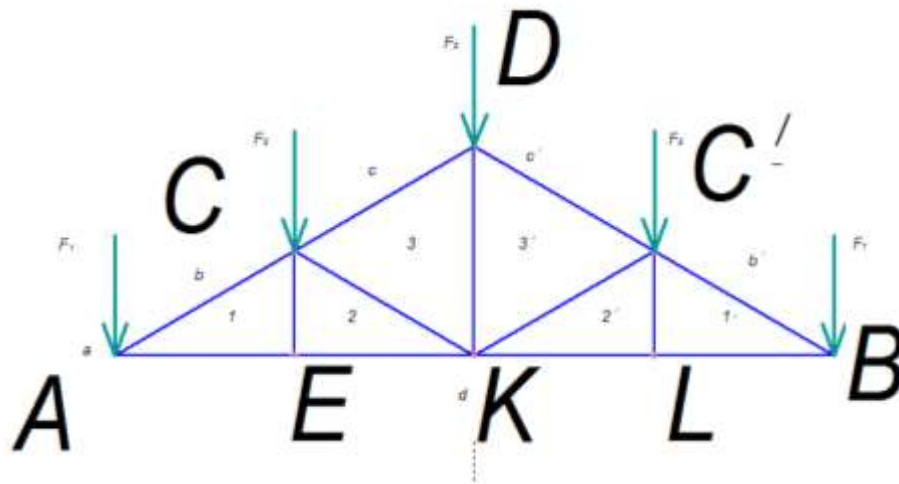
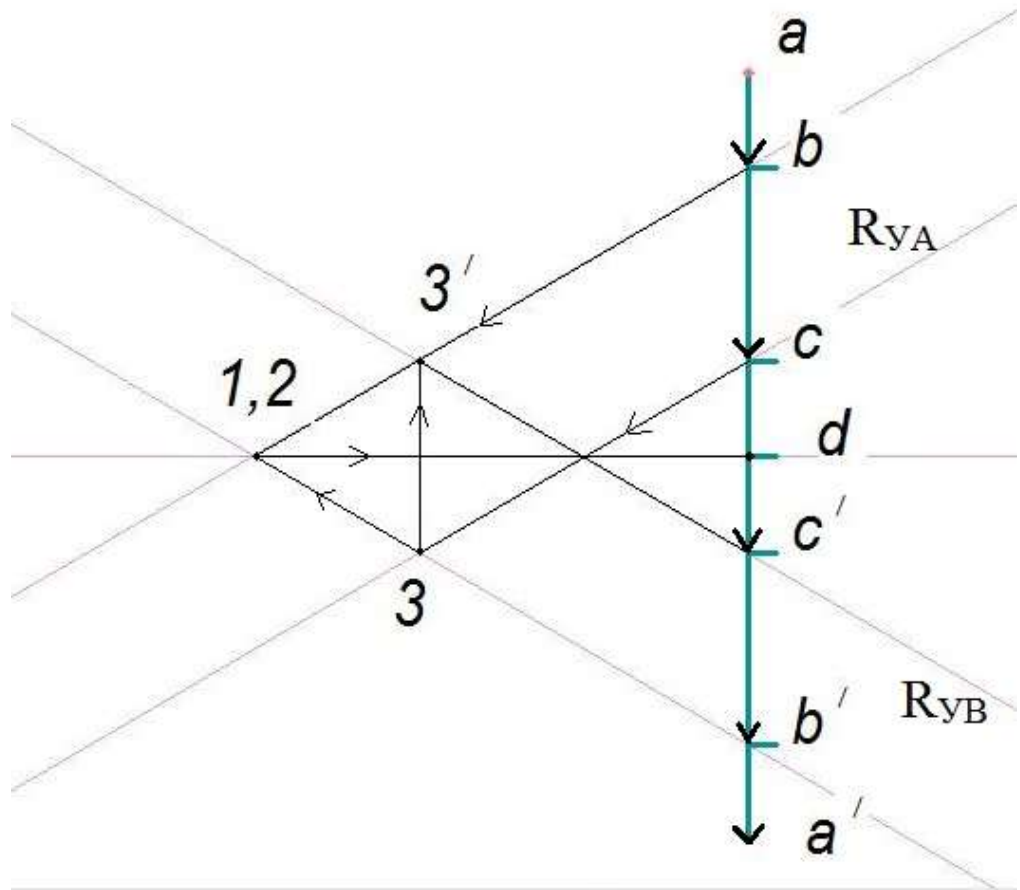


Рисунок 3





$$R_{yB}=4\text{см}\cdot(10\text{кН}/1\text{см})=40\text{ кН}$$

$$R_{yA}=4\text{см}\cdot(10\text{кН}/1\text{см})=40\text{ кН}$$

$$A: \left. \begin{array}{l} b-1 \\ 1-d \end{array} \right\} 1$$

$$S_{B-1}=5,9\text{см}\cdot(10\text{кН}/1\text{см})=-59\text{ кН}$$

$$S_{1-D}=5\text{см}\cdot(10\text{кН}/1\text{см})=50\text{ кН}$$

$$B: \left. \begin{array}{l} 1-d \\ 2-d \\ 1-2 \end{array} \right\} 2$$

$$S_{1-2}=0$$

$$S_{2d}=5\text{см}\cdot(10\text{кН}/1\text{см})=50\text{ кН}$$

$$C: \left. \begin{array}{l} b-1 \\ 3-2 \\ 1-2 \\ c-3 \end{array} \right\} 3$$

$$S_{C-3}=-38$$

$$S_{2-3}=-19$$

$$D: \left. \begin{array}{l} c-3 \\ c'-3' \\ 3-3' \end{array} \right\} 3'$$

$$S_{3-3'}=2\text{см}\cdot(10\text{кН}/1\text{см})=20\text{ кН}$$

$$S_{C'-3'}=-38\text{ кН}$$

Задание на закрепление урока

Используя Интернет ресурсы, приведите примеры кронштейна, ферм (консольные, стропильные, крановые, башенные, мостовые). Распечатать картинки, вклеить в рабочую тетрадь и подписать